О свойстве нильинвариантости полутопологической K-теории dg-категорий и его приложениях

А. А. Коновалов

Ключевые слова: Некоммутативная теория Ходжа, dg-категории, K-теория, циклические гомологии, гипотеза о решётке

Алгебраические когомологии де Рама неособого комплексного проективного многообразия X приходят вместе с целочисленной структурой, данной сингулярными когомологиями, то есть имеется изоморфизм:

$$\mathrm{H}^i_B(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}\simeq\mathrm{H}^i_B(X,\mathbb{C})\simeq\mathrm{H}^i_{dR}(X/\mathbb{C}), \tag{1}$$

где последний изоморфизм приходит из теорем сравнения де Рама и Гротендика. При этом правая часть почти определяется dg-категорией совершенных комплексов $\mathrm{Perf}(X)$ многообразиия: для dg-категории T обозначим $\mathrm{HP}(T)$ и $\mathrm{HP}_i(T)$ комплекс, считающий её периодические циклические гомологии, и его i-е гомологии, соответственно; имеется изоморфизм

$$\mathrm{HP}_{-i}(\mathrm{Perf}(X))\simeq\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{H}^{i+2k}_{dR}(X), \tag{2}$$

и левая часть приходит с фильтрацией, соответствующей разложению в прямую сумму правой части. Этот изоморфизм стал одной из мотивировок к восприятию периодических циклических гомологий произвольной dg-категории T как аналога (2-периодизованных) когомологий де Рама. При этом, в ситуации $T=\mathrm{Perf}(X)$ периодические гомологии приходят вместе с естественной рациональной (и целочисленной) структурой из изоморфизма (1). В этой заметке мы рассматриваем вопрос о продолжении данной рациональной структуры на более широкий класс dg-категорий.

В [2], Энтони Бланком была определена топологическая K-теория dg-категорий – инвариант, принимающий значения в стабильной ∞-категории спектров, чьи основные свойства, доказанные Бланком, собраны в следующей теореме.

Теорема 1. *(Бланк, [2], Theorem 1.1) Топологическая K-теория* $\mathrm{K}^{\mathrm{top}}: dgCat_{\mathbb{C}}\longrightarrow Sp$

0) является локализующим инвариантом, то есть: переводит Морита-эквивалентности в эквивалентности, точные тройки dg-категорий в точные тройки (иначе, выделенные треугольники) спектров и коммутирует с фильтрованными копределами;

1) приходит с естественными преобразованиями $\mathrm{K}\to\mathrm{K}^{\mathrm{top}}\to\mathrm{HP}$ *(здесь и далее мы рассматриваем категорию комплексов как подкатегорию в Sp при помощи (обобщенного) функтора Эйленберга-Маклейна; таким образом, функтор* HP *принимает значения в Sp), дополняющими отображение следа* $\mathrm{K}\to\mathrm{HC}^-\to\mathrm{HP}$ *до коммутативного квадрата;*

2) восстанавливает обычную топологическую K-теорию в ситуации $T=\mathrm{Perf}(X)$, *где X – гладкое алгебраическое $\mathbb{C}$-многообразие:* $\mathrm{K}^{\mathrm{top}}(Perf(X))\simeq K_{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}}):=\underline{\mathrm{Hom}}(\Sigma^\infty(X^{\mathrm{an}})_+,KU)$, *согласованно с естественными преобразованиями в 1).*

The author was partially supported by the Theoretical Physics and Mathematics Advancement Foundation «BASIS», by the HSE University Basic Research Program, and by the RSF grant «Алгебраическая K-теория, мотивные структуры и циклические гомологии»

Цель этой заметки – дать доказательство следующей теоремы, следуя идеям [8].

Теорема 2. *Топологический характер Черна* $Ch^{\mathrm{top}} : \mathrm{K}^{\mathrm{top}} \to \mathrm{HP}$ *(Теорема 1,1)) задаёт целочисленную структуру на периодических гомологиях для следующих классов dg-категорий:*

а) dg-категории $T = \mathrm{Perf}(B)$ *совершенных* B*-модулей, где* B *– связная собственная dg-алгебра;*

б) $T = \mathrm{Perf}(B)$*, где* B *– связная dg-алгебра, такая что* $H_0 B$ *– раширение коммутативной* $\mathbb{C}$*-алгебры конечного типа при помощи нильпотентного идеала;*

в) dg-категории $T = \mathrm{Perf}(\mathfrak{X})$ *совершенных квазикогерентных* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$*-модулей, где* $\mathfrak{X}$ *– производная схема, чей классический локус – схема конечного типа над* $\mathbb{C}$*.*

Иными словами, для таких dg-категорий, отображение

$$Ch^{\mathrm{top}} \otimes_{\mathbb{S}} \mathbb{C} : \mathrm{K}^{\mathrm{top}}(T) \otimes_{\mathbb{S}} \mathbb{C} \to \mathrm{HP}(T) - \tag{3}$$

эквивалентность. .

Замечание 1. Топологическая К-теория также задаёт целочисленную структуру на периодических гомологиях ANS производных стеков с гладким классическим локусом ([4], Theorem 5.3.3), конечномерных dg-алгебр (см. обсуждение в [8], Proposition 6.4), dg-категорий локальных систем комплексов $\mathbb{C}$-векторных пространств на многообразиях с мягким ограничением на фундаментальную группу (например, для многообразий размерности не больше 3) ([8], Theorem 6.16), некоторых wrapped категориях Фукая и т. д.

Для нас будет удобно использовать следующую конструкцию (см. [1], [5], [8]) для определения топологической К-теории.

Рассмотрим функтор $\mathrm{an} : \mathrm{Aff}^{ft}_{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathrm{Top}_{cl}$, сопоставляющий аффинной $\mathbb{C}$-схеме конечного типа пространство её комплексных точек с обычной топологией. Он индуцирует пару сопряжённых функторов:

$$Pr_{Sp}(\mathrm{Aff}^{ft}_{\mathbf{C}}) \underset{an^*}{\overset{an_!}{\rightleftarrows}} Pr_{Sp}\mathrm{Top}_{cl}$$

Компонируя $an_!$ с ограничением на стандартный косимплициальный объект в Top_{cl} и геометрической реализацией

$$Pr_{Sp}(\mathrm{Aff}^{ft}_{\mathbf{C}}) \longrightarrow Pr_{Sp}\mathrm{Top}_{cl} \longrightarrow Pr_{Sp}\Delta \longrightarrow Sp,$$

получаем *функтор топологической реализации* $Re : Pr_{Sp}(\mathrm{Aff}^{ft}_{\mathbf{C}}) \longrightarrow Sp$ (см. [8], Theorem 2.3 для сравнения с конструкцией в [2]). Он коммутирует с произвольными копределами, – например, потому что имеет правый сопряжённый: $\mathcal{H} : E \mapsto \{X \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(\Sigma^{\infty} X^{\mathrm{an}}_{+}, E)\}$

Определение 1. *Рассмотрим предпучок* $\underline{\mathrm{K}}(T) : \mathrm{Spec}(A) \mapsto \mathrm{K}(T \otimes_{\mathbb{C}} A)$*. Определим полутопологическую К-теорию* K^{st} *dg-категории* T*:* $\mathrm{K}^{\mathrm{st}}(T) := Re(\underline{\mathrm{K}(T)})$.

Данное определение отчасти мотивировано следующим вычислением.

Предложение 1. *(*[2], [8]*)* $\mathrm{K}^{\mathrm{st}}(\mathbb{C}) \simeq ku$ *как кольцевой спектр; при этом комплексификация полутопологического характера Черна* $Ch^{\mathrm{st}}_{\mathbb{C}} : \mathrm{K}^{\mathrm{st}}(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{S}} \mathbb{C} \to \mathrm{HP}(\mathbb{C}/\mathbb{C})$ *отождествляется с коединицей связного обрезания периодических гомологий.*

Это задаёт на полутопологической К-теории от произвольной dg-категории структуру $\mathrm{K}^{\mathrm{st}}(\mathbb{C}) \simeq ku$-модуля. Выберем образующую $\beta \in \pi_2 \mathrm{K}^{\mathrm{st}}(\mathbb{C})$ (это можно сделать каноническим образом).

Определение 2. *Определим функтор топологической K-теории:*

$$\mathrm{K}^{\mathrm{top}} : dgCat_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{KU}.$$

$$T \mapsto \mathrm{K}^{\mathrm{st}}(T)[\beta^{-1}] \simeq \mathrm{K}^{\mathrm{st}}(T) \otimes_{ku} KU.$$

Для доказательства Теоремы 2 ключевым является следующее утверждение о производной нильинвариантности.

Предложение 2. *Пусть $\phi : B \to A$ – отображение связных $\mathbb{C}$-dg-алгебр, такое что индуцированное отображение на H_0 представляет $\mathrm{H}_0 B$ как расширение $\mathrm{H}_0 A$ при помощи нильпотентного идеала. Тогда $\mathrm{K}^{\mathrm{st}}(\phi)$ (а значит, и $\mathrm{K}^{\mathrm{top}}(\phi)$) – эквивалентность.*

Замечание 2. По Теореме [7], из Предложения 2, в частности, следует, что (полу)топологическая K-теория удовлетворяет cdh-спуску при ограничении на схемы, что позволяет вычислять её у особых многообразия, используя разрешение особенностей.

Для доказательства Предложения 2 рассмотрим ещё один пример вычисления топологической реализации. Для инварианта $F : dgCat_{\mathbb{C}} \longrightarrow Sp \supset \mathrm{Mod}_{\mathrm{H}\mathbb{Z}}$ (например, для гомологий Хохшильда HH, обычных HC, отрицательных HC^- и периодических HP циклических гомологий, рассматриваемых как функторы со значениями в спектрах с помощью (обобщённого) функтора Эйленберга-Маклейна) обозначим $\underline{F}(T)(A) := F(T \otimes_{\mathbb{C}} A)$.

Предложение 3. *Для любой $\mathbb{C}$-dg-категории T и любого поля $k \subset \mathbb{C}$ (1) $Re(\underline{\mathrm{HH}}(T\,/k)) = 0$, (2) $Re(\underline{\mathrm{HC}}(T\,/k)) = 0$, (3) $Re(\underline{\mathrm{HC}}^-(T\,/k)) \simeq Re(\underline{\mathrm{HP}}(T\,/k))$.*

Доказательство. Из $\mathrm{HC}(T \otimes_{\mathbb{C}} A/k) \simeq \mathrm{colim}_{BS^1}\, \mathrm{HH}(T \otimes_{\mathbb{C}} A/k))$ и коммутирования топологической реализации с копределами видим, что (1) $\Longrightarrow$ (2). Из точной тройки $\mathrm{HC}^- \to \mathrm{HP} \to \mathrm{HC}[2]$ получаем (2) $\Longrightarrow$ (3). Таким образом, достаточно доказать зануление Re на (подкрученных на T) гомологиях Хохшильда.

Заметим, что $Re(\underline{\mathrm{HH}}(T\,/k))$ приходит со структурой $Re(\underline{\mathrm{HH}}(\mathbb{C}\,/k))$-модуля. Поэтому достаточно проверить, что умножение на $1 \in Re(\underline{\mathrm{HH}}(\mathbb{C}\,/k))$ эквивалентно 0.

Расшифровывая определения, видим, что $Re(\underline{\mathrm{HH}}(\mathbb{C}\,/k))$ получается геометрической реализацией симплициального спектра $\mathrm{an}_!(\underline{\mathrm{HH}}(\mathbb{C}\,/k))|_{\Delta^\bullet_{\mathrm{top}}} \simeq |[n] \mapsto \mathrm{colim}_{\Delta^n_{\mathrm{top}} \mapsto X^{\mathrm{an}}}\, \mathrm{HH}(X\,/k))|$. Под Δ^0_{top} есть начальный объект $\Delta^0_{\mathrm{top}} \to (Spec\mathbb{C})^{\mathrm{an}}$, задающий изоморфизм $\omega : \mathrm{an}_!(\underline{\mathrm{HH}}(\mathbb{C}\,/k))(\Delta^0_{\mathrm{top}}) \simeq \mathrm{HH}(\mathbb{C}/k)$, согласованный с умножением. Рассмотрим $\xi \in \pi_0(\mathrm{an}_!(\underline{\mathrm{HH}}(\mathbb{C}\,/k))(\Delta^0_{\mathrm{top}}))$, заданный парой $(\xi_{\mathrm{an}}, \xi_{\mathrm{HH}})$, где $\xi_{\mathrm{an}} := \{s \mapsto s\} \in \mathrm{Top}_{cl}([0,1], \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Top}_{cl}(\Delta^1, (\mathrm{Spec}\mathbb{C}[t])^{\mathrm{an}})$ и $\xi_{\mathrm{HH}} := t \in \mathbb{C}[t] \simeq \mathrm{HH}_0(\mathbb{C}[t])$. Одно из отображений грани отправит ξ в пару $(0 \in (\mathrm{Spec}\mathbb{C}[t])^{\mathrm{an}}, t \in \mathrm{HH}_0(\mathbb{C}[t]))$, а другое – в $(1 \in (\mathrm{Spec}\mathbb{C}[t])^{\mathrm{an}}, t \in \mathrm{HH}_0(\mathbb{C}[t]))$. При отождествлении w эти пары перейдут в 0 и 1 соответственно, поэтому ξ задаёт гомотопию с нулём тождественного отображения на $Re(\underline{\mathrm{HH}}(\mathbb{C}\,/k))$, а значит и на $Re(\underline{\mathrm{HH}}(T\,/k))$.

Мы используем следующую теорему (пункт а) принадлежит Гудвилли, пункт б) – ему же в рациональном случае и Дандасу-Гудвилли-МакКарти в произвольном.

Теорема 3. *([6], [3])*
Пусть $\phi : B \to A$ как в Предложении 2. Тогда а) $\mathrm{HP}(\phi)$ – 'эквивалентность. б) Пусть $tr : \mathrm{K} \to \mathrm{TC}$ – отображение следа. Тогда оно задаёт эквивлентность на конусах: $\mathrm{cofib}(\mathrm{K}(\phi)) \simeq \mathrm{cofib}(\mathrm{TC}(\phi))$.

Доказательство Предложения 2.
Разворачивая определение $\mathrm{Re}(\underline{\mathrm{F}}(\mathrm{T}))$, видим, что она вычисляется несколькими итерациями взятий копределов по диаграммам, образованным значенниями $F(T \otimes_{\mathbb{C}} R)$. При этом, благодаря функториальности, ϕ, tr, $tr(\mathrm{cofib}(\phi))$ задают отображения диаграмм,

причём все отображения $B\otimes_{\mathbb{C}} R =: B' \to A' := A\otimes_{\mathbb{C}} R$ – производные нильрасширения, поэтому при вычислении $\mathrm{cofib}(\mathrm{K}^{\mathrm{st}}(\phi))$ можно использовать (коммутирование Re с копределами и) Теорему 3, б), чтобы свести задачу к нильинвариантности $Re(\underline{\mathrm{TC}})$.

$$\mathrm{cofib}(\mathrm{K}^{\mathrm{st}}(\phi)) \simeq |[n] \mapsto \operatorname*{colim}_{\Delta^n_{\mathrm{top}}\to(\mathrm{Spec} R)^{\mathrm{an}}} (\mathrm{cofib}(\mathrm{K}(B\otimes_{\mathbf{C}} R) \to \mathrm{K}(A\otimes_{\mathbf{C}} R)))| \simeq$$

$$\simeq |[n] \mapsto \operatorname*{colim}_{\Delta^n_{\mathrm{top}}\to(\mathrm{Spec} R)^{\mathrm{an}}} (\mathrm{cofib}(\mathrm{TC}(B\otimes_{\mathbf{C}} R) \to \mathrm{TC}(A\otimes_{\mathbf{C}} R)))|.$$

При этом, нас интересуют только связные $\mathbb{Q}$-dg-алгебры; на них $\mathrm{TC} \simeq \mathrm{HC}^-(-/\mathbb{Q})$ и вопрос сводится к нильинвариантности $Re(\underline{\mathrm{HC}^-})$, которая, в свою очередь, следует из Предложения 3:

$$[n] \mapsto \mathrm{cofib}(\mathrm{K}^{\mathrm{st}}(\phi)) \simeq |\operatorname*{colim}_{\Delta^n_{\mathrm{top}}\to(\mathrm{Spec} R)^{\mathrm{an}}} (\mathrm{cofib}(\mathrm{HC}^-(B\otimes_{\mathbf{C}} R) \to \mathrm{HC}^-(A\otimes_{\mathbf{C}} R)))| \simeq$$

$$\simeq \mathrm{cofib}(Re(\mathrm{HC}^-(B\otimes_{\mathbb{C}}\cdot)) \to Re(\mathrm{HC}^-(A\otimes_{\mathbb{C}}\cdot))) \simeq \mathrm{cofib}(Re(\mathrm{HP}(B\otimes_{\mathbb{C}}\cdot)) \to Re(\mathrm{HP}(A\otimes_{\mathbb{C}}\cdot))) \simeq$$

$$\simeq Re(\mathrm{cofib}(\mathrm{HP}(B\otimes_{\mathbb{C}}\cdot) \to \mathrm{HP}(A\otimes_{\mathbb{C}}\cdot))) \simeq Re(0) \simeq 0,$$

– в предпоследнем изоморфизме мы используем производную нильинвариантность периодических гомологий (Теорема 3, а)).

Теперь мы можем доказать Теорему 2.

Доказательство Теоремы 2.

Для доказательства в) можно воспользоваться тем, что периодические гомологии и топологическая K-теория – локализующие инварианты, а потому удовлетворяют Зарискому спуску, – что позволяет свести задачу к аффинному случаю, который будет следовать из пункта б).

Используя Предложение 2 и Теорему 3,а), видим, что без уменьшения общности можно считать, что в а,б) B сосредоточена в градуировке 0 и без нильпотентов. Тогда по теореме Веддербёрна, в а) B – прямая сумма матричных алгебр над $\mathbb{C}$, поэтому результат следует из вычисления для $B = \mathbb{C}$. б) сводится к случаю аффинной схемы конечного типа, который в гладкой ситуации покрывается Теоремой 1,2), а в общем случае следует из cdh-спуска (Замечание 2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] B. Antieau, J. Heller, “Some remarks on topological K-theory of DG categories”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **146(10)** (2018), 4211-4219. **[2]** A. Blanc, “Topological K-theory of complex noncommutative spaces”, *Compositio Math.*, **152** (2016), 489–555. **[3]** B. Dundas, T. Goodwillie, R. McCarthy, “The Local Structure of Algebraic K-Theory”, *Springer-Verlag London 2012.* **[4]** E. Elmanto, V. Sosnilo, “On Nilpotent Extensions of ∞-Categories and the Cyclotomic Trace”, *International Mathematics Research Notices*, **rnab179** (2021). **[5]** E. Friedlander, M. Walker, “Comparing K-theories for complex varieties”, *Amer. J. Math.*, **123(5)** (2001), 779–810. **[6]** T. Goodwillie, “Cyclic homology, derivations, and the free loopspace”, *Topology*, **24(2)** (1985), 187-215. **[7]** M. Land, G. Tamme, “On the K-theory of pullbacks”, *Ann. of Math. (2)*, **190(3)** (2019), 877-930. **[8]** A. Konovalov, “Nilpotent invariance of semi-topological K-theory of dg-algebras and the lattice conjecture”, *arXiv preprint 2102.01566*, 2021.

А. А. Коновалов
Национальный исследовательский
университет "Высшая школа экономики"
E-mail: kon_an_litsey@list.ru

Поступило